第35卷第3期　　　　武汉大学学报·信息科学版　　　　Vol. 35 No. 3
2010年3月　　　　Geomatics and Information Science of Wuhan University　　　　March 2010

文章编号:1671-8860(2010)03-0308-05　　　　**文献标志码**:A

摄影测量中病态问题的条件数指标分析

张永军[1]　**吴　磊**[1]　**林立文**[1]　**赵家平**[1]

(1　武汉大学遥感信息工程学院,武汉市珞喻路129号,430079)

摘　要:介绍了评价法方程系数矩阵病态性常用的条件数指标的基本原理,分析了用条件数评价平差系统病态性的不足,并将其归结为3类风险。指出了重新参数化是利用条件数评价病态性的必要前提,并论述了重新参数化改善由数值计算引起的病态问题和避免条件数评价的范数风险,成功地解释了航空摄影后方交会时解算结果的稳定性和条件数指标的矛盾。

关键词:条件数; 病态问题; 范数; 重新参数化; 后方交会

中图法分类号:P231.2

20世纪中期,国际上开始研究关于伪逆方程解法及最小二乘解的稳定性问题。随着线性系统和计算机在工程领域的深入应用,病态问题得到关注,并成为数值分析、回归分析、测量平差等领域研究的热点[1-7],其中病态问题的诊断及改善是关注的重点。目前,已经提出了十余种病态问题诊断技术[6,8-12]。条件数是目前理论研究和工程应用领域最常用的度量病态性程度的指标。人们根据几十年来的统计应用经验总结出:条件数小于100时可以认为没有病态;条件数在100～1 000之间时认为存在中等程度的病态性;条件数超过1 000时认为存在严重的病态性[13]。当系统处于严重病态时最小二乘估计的均方误差很大,导致最小二乘估值与真值相距甚远,最小二乘估计不再最优。

单像后方交会求解影像外方位元素是航空摄影中应用广泛的经典数学模型,几十年的生产经验表明,在有效剔除数据粗差后,最小二乘平差总能解得理想的外方位元素;但这些模型的条件数都有10^8～10^9之多,远远大于1 000,按照条件数的经验阈值,此时模型处于严重病态,这是一对看似矛盾的结论。本文将深入分析两个经验矛盾的成因、利用条件数评价病态性的风险及其改进措施。

1　条件数指标及其评价病态的风险

1.1　条件数的基本概念

对于法方程 $N\hat{x} = W$,假定 N、W 中有微小的扰动 δN、δW,引起估计量 $\hat{x}$ 有偏 $\delta\hat{x}$,则扰动后的法方程可表示成:

$$(N+\delta N)(\hat{x}+\delta\hat{x}) = (W+\delta W) \tag{1}$$

由矩阵范数的相关定理可以得出结论,若

$$\|\delta N\| = \frac{1}{\|N^{-1}\|} \tag{2}$$

则式(1)有唯一解 $\hat{x}+\delta x$,且下列估计式成立:

$$\frac{\|\delta\hat{x}\|}{\|\hat{x}\|} \leq \frac{\|N\|\|N^{-1}\|}{1-\|N\|\|N^{-1}\|\frac{\|\delta N\|}{\|N\|}}\left(\frac{\|\delta N\|}{\|N\|}+\frac{\|\delta W\|}{\|W\|}\right) \tag{3}$$

式中,$\|\cdot\|$为矩阵范数。由于 N 为正定的实对称矩阵,故有:

$$K = \mathrm{cond}(N) = \|N\|\|N^{-1}\| = \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \tag{4}$$

式中,K为N阵的条件数;λ_1、λ_n分别是N阵的最小和最大特征值[1]。条件数法是用一个相对数值代替特征分析法中最小特征值"很接近于零"这一模糊概念,因而可以采用相同的经验阈值判定不同的系统是否处于病态。但依照这一经验阈值判定某法方程矩阵是否病态时,依然存在几个风险

收稿日期:2009-01-08。

项目来源:国家自然科学基金资助项目(40671157);国家863计划资助项目(2006AA12Z136);国家教育部新世纪优秀人才支持计划资助项目(NCET-07-0645)。

可能导致错误判断。

1.2　评价病态性的风险

1.2.1　第一类风险:前提条件的风险

式(2)是条件数评价的前提条件,当观测值含有大粗差时,式(2)不成立。所以病态问题只考虑系统对小波动的反映,观测值中的大粗差对系统的影响不属于病态问题范畴。当系统同时存在粗差和病态时,应先剔除粗差再作病态性分析。当粗差未能完全剔除时,基于条件数的病态性诊断存在风险,因为此时前提条件不满足,式(3)未必成立。

1.2.2　第二类风险:“≤”的风险

式(3)由“≤”连接而非“=”。对不同的系统加入等量的相对误差,式(3)简化为:

$$\frac{\|\delta\hat{x}\|}{\|\hat{x}\|} \le \frac{KC_2}{1 - KC_1} \tag{5}$$

式中,$C_1 = \frac{\|\delta N\|}{\|N\|}$;$C_2 = \frac{\|\delta N\|}{\|N\|} + \frac{\|\delta W\|}{\|W\|}$,皆为常数。

令 $f(K) = \frac{KC_2}{1 - KC_1}$,由式(2)知 $KC_1 < 1$,此时 $f(K)$ 为$(1, +\infty)$上的单调增函数。即若存在 $K_1 < K_2$,则有 $f(K_1) < f(K_2)$。但是,

$$\left.\begin{array}{l} f(K_1) < f(K_2) \\ \left(\frac{\|\delta\hat{x}\|}{\|\hat{x}\|}\right)_1 < f(K_1) \\ \left(\frac{\|\delta\hat{x}\|}{\|\hat{x}\|}\right)_2 < f(K_2) \end{array}\right\} \nRightarrow \left(\frac{\|\delta\hat{x}\|}{\|\hat{x}\|}\right)_1 < \left(\frac{\|\delta\hat{x}\|}{\|\hat{x}\|}\right)_2 \tag{6}$$

也即

$$K_1 < K_2 \nRightarrow \left(\frac{\|\delta\hat{x}\|}{\|\hat{x}\|}\right)_1 < \left(\frac{\|\delta\hat{x}\|}{\|\hat{x}\|}\right)_2 \tag{7}$$

式(7)表明,条件数评价系统病态性理论上存在缺陷,大条件数的系统未必比小条件数的系统更病态,即病态程度与条件数并非严格单调。

1.2.3　第三类风险:范数的风险

范数反映的是矩阵(向量)的全局性质,当矩阵(向量)元素在量级上有巨大差异时,小量级元素的大波动不会引起矩阵(向量)范数的变化。即系统中小量级参数的不稳定会被忽视掉,也就不会反映在基于谱分析的条件数指标上。以求解两个参数为例,如果设计阵的列向量存在 10^3 的差异,则法阵为 $N = \begin{bmatrix} 1 & 10^3 \\ 10^3 & 10^6 \end{bmatrix}$,N 阵的第一个元素变化 1 000 倍得 $N' = \begin{bmatrix} 10^3 & 10^3 \\ 10^3 & 10^6 \end{bmatrix}$,但是 $\|N\|_1 = \|N'\|_1 = 1\,001\,000$,$\|N\|_\infty = \|N'\|_\infty = 1\,001\,000$,$\|N\|_2 = 1\,000\,001 \approx 1\,000\,001.001 = \|N'\|_2$。

很明显,小量级元素的大波动被矩阵范数吞没。另外,对于未知参数向量 $\hat{x}$,相对误差向量 $\left|\frac{\delta\hat{x}_i}{\hat{x}_i}\right|$ $(i = 1, 2\cdots, n)$ 与 $\left\|\frac{\delta\hat{x}}{\hat{x}}\right\|$ 存在依赖关系,是精确反映系统波动的指标,但 $\left\|\frac{\cdot}{\cdot}\right\|$ 与 $\left\|\frac{-}{\cdot}\right\|$ 的关系并不明确。实验表明,当 $x_i\,(i = 1, 2\cdots n)$ 存在量级上的巨大差异时,$\frac{\|\delta\hat{x}\|}{\|\hat{x}\|}$ 严重偏离 $\left\|\frac{\delta\hat{x}}{\hat{x}}\right\|$,由式(3)条件数只能限制 $\frac{\|\delta\hat{x}\|}{\|\hat{x}\|}$ 的上限,却限制不了 $\left\|\frac{\delta\hat{x}}{\hat{x}}\right\|$ 的上限,此时条件数失去意义。现采用模拟数据进行实验分析,设未知数真值为 $[\hat{x}_1\ \ \hat{x}_2\ \ \hat{x}_3] = [10^{-5}\ \ 1\ \ 2]$,对 $\hat{x}_1$ 加入 100 倍和 10 倍的波动,并评价系统的病态性,结果如表 1 所示。可见,小量级参数 $\hat{x}_1$ 出现 100 倍和 10 倍的波动时,$\left|\frac{\delta\hat{x}}{\hat{x}}\right|$、$\left\|\frac{\delta\hat{x}}{\hat{x}}\right\|$ 都能够准确体现这种不稳定;而由于两个大量级参数 $\hat{x}_2$、$\hat{x}_3$ 的存在,$\|\delta\hat{x}\|$ 基本不受 $\hat{x}_1$ 波动的影响,继而 $\frac{\|\delta\hat{x}\|}{\|\hat{x}\|}$ 失去意义,条件数失效。事实上,式(3)对于任何范数都成立,如果在上述实验中取无穷泛数计算,两组实验的 $\frac{\|\delta\hat{x}\|}{\|\hat{x}\|}$ 值是完全相等的,都无法反映 $\hat{x}$ 的波动,这是由泛数的全局性决定的。法方程系数矩阵 N 也存在类似的实验结论。

第三类风险的存在通常会导致相同病态程度的系统小特征值接近零的程度不改变,而由于大特征值的明显不同致使条件数出现不该有的波动,进而导致相同病态程度的系统具有不同的条件数指标。而重新参数化可以归一化未知参数和法方程系数矩阵元素量级,也可以改善由数值计算中有效位数的不足引起的病态性。

表 1　不同量级参数波动对范数的影响

Tab.1　Influences on Norm with Changes of Unknown Parameters

统计项目	实验组	
	1	2
$\hat{x}$	$[\hat{x}_1\ \ \hat{x}_2\ \ \hat{x}_3] = [10^{-5}\ \ 1\ \ 2]$	
$\delta\hat{x}$	$[0.001\ \ 0.001\ \ 0.002]$	$[0.000\,1\ \ 0.001\ \ 0.002]$
$\left\lvert\frac{\delta\hat{x}}{\hat{x}}\right\rvert$	$[100\ \ 0.001\ \ 0.001]$	$[10\ \ 0.001\ \ 0.001]$
$\left\lVert\frac{\delta\hat{x}}{\hat{x}}\right\rVert$	100	10
$\frac{\lVert\delta\hat{x}\rVert}{\lVert\hat{x}\rVert}$	$\frac{0.002\,45}{2.236\,07} = 1.1\times10^{-3}$	$\frac{0.002\,24}{2.236\,07} = 1.0\times10^{-3}$

2　重新参数化

2.1　病态问题的分类

本文将病态性问题的成因分为 3 类:①数值

计算引起的病态性,由计算方法的数值稳定性、计算机字长决定。②数据列的复共线性,观测信息引入不足。从统计角度说就是由于某些条件所限,观测子样为局部采样结果,导致样本统计特性与总体不符。③参数列的复共线性,不能确定模型的独立参数个数,过度参数化后导致某些参数之间存在复共线性,从而引起的病态问题。参考文献[2]中指出过度参数化后,最小二乘求解的未知参数仍然是无偏的,但协方差变大,即精度降低。比如为补偿航摄仪器系统误差所引进的附加参数,它们之间的复共线性往往导致模型病态。

由于原因①导致病态的机理和后两者不同,为区别对待,以下叙述中将①引起的病态称为第一类病态,②、③原因引起的病态成为第二类病态。

2.2 重新参数化的定义

对原误差方程引入满秩对角阵 G,于是,

$$v = AGG^{-1}x - l \tag{8}$$

令

$$B = AG, z = G^{-1}x \tag{9}$$

法方程为:

$$B^{T}PBz = B^{T}Pl \tag{10}$$

$$z = (B^{T}PB)^{-1}B^{T}Pl \tag{11}$$

$$x = Gz \tag{12}$$

重新参数化后的法方程系数矩阵与原法方程系数矩阵的关系为:

$$N' = B^{T}PB = G^{T}A^{T}PAG = G^{T}NG \tag{13}$$

显然,按上述方法求得的精确解(没有计算误差)与直接解算的未知参数在数值上相等。

在病态问题中,重新参数化有两个重要作用:改善第一类病态问题和避免条件数评价的第三类风险。

3 第一类病态问题的改善

现有研究成果认为,重新参数化的 G 阵本身为病态阵,且 AG 与 A 的谱结构未知,因此重新参数化一般不能改善病态问题。其实,G 阵虽然病态,但重新参数化后求解参数 x 的过程并不涉及 G 阵的求逆,此时参与矩阵运算的都是良态矩阵,数值计算的稳定性肯定优于原方程。不过可以肯定,如果没有计算误差,可以保证重新参数化前后求得的未知数数值完全相等,所以重新参数化不能改善第二类病态。另外,从大量的模拟实验中也可以发现,重新参数化后,法阵的最小特征值量级不变,而最大特征值有明显的量级上的跃迁,从而引起条件数的改变。按照特征分析法,法方程系数矩阵特征值接近零的程度不变,系统的复共线性程度不变。对于法方程:

$$\begin{bmatrix} 1 & 10^4 \\ 1.2 & 1.5\times10^4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10\,001.0 \\ 15\,001.2 \end{bmatrix}$$

则

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 10^4 \\ 1.2 & 1.5\times10^4 \end{bmatrix}$$

$$N^{-1} = \frac{1}{3\,000}\begin{bmatrix} 1.5\times10^4 & -10^4 \\ -1.2 & 1 \end{bmatrix}$$

按计算机中浮点数的表示方法 $f = mr^{e}$,其中 m 表示尾数;r 表示基数;e 表示阶码。m 和 e 中都有一个字长的符号位,当某一数字类型的字长确定后,f 所能表示的数字的范围和精度也唯一确定。一般情况下,e 体现数字的范围,m 体现数字的精度。假定计算机分配的 m 字长能精确到小数点后第 i 位,取 i=4, 5, 6, 7, 8,9,计算结果见表 2。

由于 N 阵第一列与第二列存在大致 10^4 的量级差异,按下式构造 G 阵可以达到最优改善效果:

$$G = \begin{bmatrix} 10^{4-i} & 0 \\ 0 & 10^{-i} \end{bmatrix}$$

重新参数化后求解 x,取 i=4, 5, 6, 7, 8,9,计算结果见表 3。对比表 2 和表 3 可以看出,重新参数化前法方程系数矩阵的条件数超过 100 000,而重新参数化后只有 20 左右,说明对条件数的改善效果非常好。当计算精确到小数点后 9 位或者更多时,法方程系数矩阵元素存在 10^4 的差异不会影响计算结果,重新参数化前后计算结果都是真值;但计算精确到小数点后 4~8 位时,法方程系数矩阵元素 10^4 的量级差异会影响计算结果,重新参数化能获得更精确的解。因此,重新参数化不仅可以降低条件数,也可以在有限的计算位数内保持精确解算结果。

表 2 给定字长的未知数解算结果

Tab. 2 Results of Unknowns Computation with Fixed Valid Digits

未知数	真值	计算过程中保留有效位数					
		4	5	6	7	8	9
x_1	1	1.5	1.05	1.005	1.000 5	1.000 1	1
x_2	1	0.5	0.95	0.995	0.999 5	0.999 9	1
最小特征值 = 0.20			最大特征值 = 15 000.80			条件数 = 108 333	

表 3　重新参数化后给定字长的未知数解算结果

Tab. 3　Results of Unknowns Computation with Fixed Valid Digits After Re-parameterization

未知数	真值	计算过程中保留有效位数					
		4	5	6	7	8	9
x_1	1	1.5	1.005	1	1	1	1
x_2	1	0.999 9	1.0	1	1	1	1
最小特征值 = $0.13\times10^{i-4}$			最大特征值 = $2.37\times10^{i-4}$			条件数 = 18.91	

4　第三类风险的避免

重新参数化通过设计合理的 G 阵归一化平差系统中未知参数的量级,使设计阵的各元素具有可比性,从而使得法方程系数矩阵和未知参数向量各个元素的波动能够敏感地反映到矩阵(向量)范数上,避免了第三类风险,保证条件数评价的合理性。

以航空摄影中后方交会为例,外方位角元素与线元素存在量级上的巨大差异,触犯了条件数评价的第三类风险,导致条件数大小失真,构建适当的对角阵 G 对模型重新参数化,后方交会的法阵条件数普遍降至 300 以下,说明按照传统的作业规范,后方交会求解外方位元素的模型属于良态模型,最小二乘的确能获得最优解,本文引言部分所述的两种经验的矛盾得到了统一。

利用后方交会同时求解影像的内、外方位元素时,如果图形结构不好,存在数据列的复共线性,内方位元素的解将很不稳定。模拟实验中采用的内、外方位元素真值为 $X_S = 0$, $Y_S = 0$, $Z_S = 8\ 000$ m, $\varphi = 0.5°$, $\omega = -0.5°$, $\kappa = 1.2°$, $f = 150$ mm, $x_0 = -0.2$ mm, $y_0 = 0.1$ mm,像元大小 0.020 mm,对应的影像地面分辨率约 1.0 m。观测值像点坐标(x, y)加入服从 $N(0, 0.01\ \text{mm})$ 分布的随机误差,相当于像点量测精度为 10 μm,像幅 200 mm ×200 mm,9 个像点在像平面上均匀分布。表 4 所示为图形结构好坏两种情况下是否进行重新参数化的解算结果统计。可以看出,在图形结构不好(控制点高差 100 m)的情况下,即使进行重新参数化,条件数仍在 10^5 量级,说明系统存在严重病态,这与实际生产经验相符。改善控制点的分布(控制点高差 3 000 m)后,不进行重新参数化时法方程系数矩阵条件数为 10^{10},导致错误地评价系统为严重病态,重新参数化后条件数降至 1 000 以下,正确地反映系统为弱病态,且能获得较稳定的内外方位元素解算结果,进一步证实了重新参数化的作用。

另外,在航天摄影测量情况下,卫星轨道高、影像焦距大、投影光束很窄,存在明显的病态问题。计算的航天摄影条件数一般在 10^{15} 量级,经重新参数化后条件数降到 10^6。虽然按照条件数的经验阈值判断两者都属于病态,但显然 10^6 才是系统的真实病态指标。

表 4　重新参数化前后的后方交会结果统计

Tab. 4　Results of Resection Before and After Re-parameterization with Different Geometric Configuration

实验组	图形结构坏		图形结构好	
预处理	未参数化	参数化	未参数化	参数化
条件数	1.2×10^{14}	8.4×10^{5}	3.3×10^{10}	881
线元素最大误差	11.574 5 m		2.493 6 m	
主点最大误差	0.198 6 mm		0.061 6 mm	
病态性质	病态		弱病态	

5　结　语

条件数是目前最为常用的度量病态性程度的指标,但其理论上的缺陷导致评价病态性时存在一定的风险,需要采用适当的数据预处理措施或寻求新的严密指标或多指标同时评价系统病态性。否则,由于盲目地使用条件数,错误地估计系统的病态程度而采用正则化解法改善病态是徒劳无益的。

重新参数化对于改善病态问题较为有效,通过归一化矩阵量级,使得参与运算的都是良态矩阵,提高了数值计算的稳定性,很好地改善了第一类病态问题。重新参数化后,按照条件数的经验阈值判断,传统的航空摄影后方交会求解外方位元素的模型良态;内外方位同时求解时,如果地面控制点分布高差较大,模型弱病态,否则模型病态;而航天摄影测量模型的病态性严重。对于后两者可以考虑使用有偏估计等正则化解法代替最小二乘估计,从而获得更优的解算结果。

参　考　文　献

[1]　颜庆津. 数值分析[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2006

[2]　李德仁, 袁修孝. 误差处理与可靠性理论[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2002

[3]　欧吉坤. 数据检测的若干理论和实践[M]. 北京: 测绘出版社, 1992

[4] 陈伟, 王新洲. 最小不确定度估计原理及其病态问题解法研究[J]. 武汉大学学报 ·信息科学版, 2008, 33(7):752-754

[5] 王孝青, 党亚民, 薛树强. 一种病态问题诊断的数值指标:矩阵向量正交度[J]. 武汉大学学报 ·信息科学版, 2009,34(2):244-247

[6] 郭建锋. 测量平差系统病态性的诊断与处理[D]. 郑州: 信息工程大学, 2002

[7] 王振杰. 测量中不适定问题的正则化解法[M]. 北京: 科学出版社, 2006

[8] Belsley D A. Conditioning Diagnostics: Collinearity and Weak Data in Regression[M]. New York: Wiley, 1991

[9] Klinger A. Approximate Pseudo Inverse Solutions to Ill-Conditioned Linear Systems[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1968, 2(2): 117-124

[10] Franklin J N. Well Posed Stochastic Extension of Ill-Posed Linear Problems [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1970, 31: 682-716

[11] Tikhonov A N, Arsenin V Y. Solutions of Ill-Posed Problems[M]. New York: Wiley & Sons, 1977

[12] Micchi A, Pannocchia G. Comparison of Input Signals in Subspace Identification of Multivariable Ill-Conditioned Systems[J]. Journal of Process Control, 2007, 18(6): 582-293

[13] 陈希孺, 王松桂. 近代回归分析:原理方法及应用[M]. 合肥: 安徽教育出版社, 1987

第一作者简介:张永军,教授,博士生导师。主要从事数字摄影测量与遥感、计算机视觉方面的研究。

E-mail:zhangyj@whu.edu.cn

Condition Numbers for Evaluation of Ill-Posed Problems in Photogrammetry

ZHANG Yongjun[1] *WU Lei*[1] *LIN Liwen*[1] *ZHAO Jiaping*[1]

(1 School of Remote Sensing and Information Engineering, Wuhan University, 129 Luoyu Road, Wuhan 430079, China)

Abstract: We discuss the principle of condition numbers that used for evaluating the extent of ill-posed problem of normal matrix. There is a contradiction between the stability of solution and the condition number of resection in photogrammetry. We find that it is not suitable in all cases to evaluate the extent of ill-posed problem by condition numbers. Three types of possible risks for evaluation of ill-condition extent with condition numbers were addressed in detail. Removing of outliers and re-parameterization are the prerequisites for evaluation of ill-condition extent with condition numbers. There are two effects of re-parameterization for ill-posed problems. One is improving the problem of ill-condition caused by numerical computation, and the other is avoiding the risk of using norm to evaluate the extent of ill-condition. Results of simulated experiments show that the proposed approach is validate for improving the problem of ill-condition.

Key words: condition number; ill-posed problem; norm; re-parameterization; resection

About the first author: ZHANG Yongjun, professor, Ph. D supervisor, majors in digital photogrammetry, remote sensing, and computer vision.

E-mail: zhangyj@whu.edu.cn